[1158] ω 一寫像ト Betti 數

山内　省三（阪大）

充分小ナル $\varepsilon>0$ ニ對シテハ Kompaktum ノ Betti 數ハ ε-Abbildung デ減ジナイ．コレハ P. Alexandroff ノ證明スル所デアル。[1] —（脚註次頁へ）—

コレヲ Bikompaktum ノ場合ニ考ヘテミヨウ。

此処デ吾々ガ考ヘル homology theory ハ Čech[2] ノ意味デアッテ、係数領域ハ rational number ノ Körper R ヲトル。Bikompaktum R ノ與ヘラレタ finite open covering ヲ $\mathfrak{W} = \{O_1, O_2, \cdots\cdots, O_S\}$ トスルトキ R カラ或ル空間 R' ヘノ連續寫像 f ガ $\mathfrak{W}$-寫像デアルト云フノハ各点 $x' \in R'$ ニ対シテソノ Urbild $f^{-1}(x') \subseteq O_i$ ナル如キ $O_i \in \mathfrak{W}$ ガ存在スルトキデアル。

補助定理

Bikompaktum R デ有限個ノ $(n-R)$-cycles

$$Z_1^n, Z_2^n, \cdots\cdots, Z_k^n$$

ガ linearly independent ナラバ R ノ homology ヲ define スル covering ノ fundamental System $\mathfrak{Z}$ ノ中ニ次ノ如キ covering $\mathfrak{U} \in \mathfrak{Z}$ ガ存在スル。

即チ $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} r_i Z_i^n(\mathfrak{u}) \sim 0, \quad r_i \in R$

ガ成立スルノハ $r_1 = r_2 = \cdots\cdots = r_k = 0$ ノトキニ限ル。カヽル $\mathfrak{U}$ ガ存在スル。

---

(1) P. Alexandroff, Bettische Zahlen u. ε-Abbildung, Fund. Math. Tom. 22.

(2) E. Čech, Théorie générale de l'homologie dans un espace quelconque, Fund. Math. Tom. 19.

証明

一自明一。

定理

Bikompaktum R ノ Betti 數ヲ finite，即チ $p^n(R) = k+1 < \infty$ トシ，補助定理ニヨリ與ヘラレル R ノ covering ヲ $\omega \in \mathfrak{Z}$ トスル。

Bikompaktum R ガ連續寫像 f ニヨリ他ノ Bikompaktum R' ニ (auf) ω-abbilden サレル時ハ其ノ寫像ニヨリ Betti 數ハ減ジナイ。

證明

$p^n(R) = k+1$ ナル故ニ linearly independent ナ (n−R)-cycles $Z_1^n, Z_2^n, \cdots\cdots, Z_{k+1}^n$ 及ビ補助定理ニヨリ $\omega \in \mathfrak{Z}$ ガ存在シテ

$$\sum_{i=1}^{k+1} t_i Z_i^n(\omega) \sim 0$$

ガ成立スルノハ，スベテノ係數 $t_1 = t_2 = \cdots\cdots = t_{k+1} = 0$ ナルトキニ限ル。

サテ $\omega = \{O_1, O_2, \cdots\cdots, O_l\}$ ニ對シテ R' ノ covering $\omega' = \{U_1, U_2, \cdots\cdots, U_m\}$ ガ存在シテ各 i ニ對シテ $f^{-1}(U_i) \subseteq O_t$ ナル如キ t ガ存在スル。(3)

---

(3) P. Alexandroff, Über die Dimension der bikompakten Räume, C.R. URSS Vol. 26 (1940)

今 $p^n(R') \leq k$ ト假定スル。

然ルトキハ高々 k ケノ lin. indep. ナ $(n-R')$-cycles

$$Z_1'^n, Z_2'^n, \cdots\cdots, Z_k'^n$$

及ビ $\mathfrak{W}_1' \in \mathfrak{Z}'$ ガ存在シテ

$$\sum_1^k r_i Z_i'^n(\mathfrak{W}_1') \sim 0$$

ガ成立スルノハ $r_1 = r_2 = \cdots\cdots = r_k = 0$ ナルトキニ限ル。

コヽニ $\mathfrak{Z}'$ ハ R' ノ homology ヲ define スル covering ノ fundamental system デアル。

今 $\mathfrak{W}'$ ト $\mathfrak{W}_1'$ ノ共通ノ refinement ヲ $\mathfrak{V}' = \{V_1, V_2, \cdots\cdots, V_{m'}\}$ トスルト勿論 essential cycles $Z_1'^n(\mathfrak{V}'), Z_2'^n(\mathfrak{V}'), \cdots\cdots, Z_k'^n(\mathfrak{V}')$ ニ對シテ

$$\sum_1^k r_i' Z_i'^n(\mathfrak{V}') \sim 0$$

ノ成立スルノハ $r_1 = r_2 = \cdots\cdots = r_k' = 0$ ノトキニ限ル。

何者, $\pi' = P_r(\mathfrak{V}', \mathfrak{W}_1')$ トスルト

$$\pi' Z_i'^n(\mathfrak{V}') \sim Z_i'^n(\mathfrak{W}_1')$$

然モ $Z_i'^n(\mathfrak{V}')$ 自身 essential ニトレルカラ。

然シ, コヽデ注意スベキハ必ズシモ $p^n(\mathfrak{V}', R') \leq k$

デハナイト云フコトデアル。

即チ lin. indep. ナ k ケノ essential cycles $Z_1'(\mathfrak{v}')$, $Z_2'(\mathfrak{v}')$, ..., $Z_k'(\mathfrak{v}')$ 以外ニ之等 k ケノ cycles トハ lin. indep. ナ関係ニアッテ然モ essential デナイ cycles ノ有限個数ガ存在シ得ルコトデアル。(4) 之ヲ

$$Z_{k+1}'(\mathfrak{v}'),\ Z_{k+2}'(\mathfrak{v}'), \ldots\ldots,\ Z_{k+j}'(\mathfrak{v}')$$

トスル。

今 $\mathfrak{v}'$ ノ充分先ノ refinement $\mathfrak{v}'' \in \mathfrak{Z}'$ ニ對シテ $\pi = P_r(\mathfrak{v}'', \mathfrak{v}')$ トシ，π ニヨリ夫々 $Z_i'(\mathfrak{v}')$ $i = 1, 2, \ldots\ldots, k$ ニ project サレルkケノ lin. indep ナ essential cycles ヲ $Z_1'(\mathfrak{v}'')$, $Z_2'(\mathfrak{v}'')$, ..., $Z_k'(\mathfrak{v}'')$ トスルト

$$\pi Z_i'(\mathfrak{v}'') \sim Z_i'(\mathfrak{v}') \quad i = 1, 2, \ldots\ldots, K$$

更ニ $Z_i'(\mathfrak{v}'')$, $i = 1, 2, \ldots\ldots k$ トハ lin. indep デ然モ essential デナイ cycles ヲ

$$Z_{K+1}'(\mathfrak{v}''),\ Z_{K+2}'(\mathfrak{v}''), \ldots\ldots,\ Z_{K+j'}'(\mathfrak{v}'')$$

トスルト

$$\pi Z_{K+s}'(\mathfrak{v}'') \sim \sum_{i=1}^{k} \beta_s^i Z_i'(\mathfrak{v}'), \quad s = 1, 2, \ldots\ldots, j'$$

---

(4) コノコトハ Kompaktum ニ対スル Alexandroff ノ Projektion spektrum ニ就テモ起リ得ル問題デアル。

サテ $\mathfrak{V}' = \{V_1, V_2, \cdots\cdots, V_{m'}\}$

明ニ各iニ對シテ $f^{-1}(V_i) \subseteq \mathfrak{Q}_t$ ナルtガ存在スル。

故ニ $f^{-1}(\mathfrak{V}') = \mathfrak{V}_1 = \{f^{-1}(V_1),\ f^{-1}(V_2), \cdots\cdots, f^{-1}(V_{m'})\}$

トスルト $\mathfrak{V}_1$ハ$\mathfrak{W}$ノ refinement. 然モ$\mathfrak{V}'$ト同ジ Nerv ヲ與ヘル。

全様ニ $f^{-1}(\mathfrak{V}'') = \mathfrak{V}_2$ ハ $\mathfrak{V}_1$ ノ refinement 且ツ$\mathfrak{V}''$ト同ジ Nerv ヲ與ヘル。

以下 $Pr.(\mathfrak{V}'', \mathfrak{V}') = \pi$ ニ対シテ $Pr.(\mathfrak{V}_2, \mathfrak{V}_1)$ トシテ<u>同ジπ</u>ヲ考ヘルコトニスル。

逆寫像 f^{-1} ニヨリ

$f^{-1}(\mathfrak{V}')$ デハ

$$f^{-1}Z'_1(\mathfrak{V}'),\ f^{-1}Z'_2(\mathfrak{V}'), \cdots\cdots, f^{-1}Z'_k(\mathfrak{V}'),$$
$$f^{-1}Z'_{k+1}(\mathfrak{V}'), \cdots\cdots, f^{-1}Z'_{k+j}(\mathfrak{V}')$$

$f^{-1}(\mathfrak{V}'')$ デハ

$$f^{-1}Z'_1(\mathfrak{V}''),\ f^{-1}Z'_2(\mathfrak{V}''), \cdots\cdots, f^{-1}Z'_k(\mathfrak{V}''), f^{-1}Z'_{k+1}(\mathfrak{V}''),$$
$$\cdots\cdots, f^{-1}Z'_{k+j'}(\mathfrak{V}'')$$

ガ考ヘラレル。

所デ $f^{-1}(\mathfrak{V}')$ ハ$\mathfrak{W}$ノ refinement ナル故 $k+1$ ケノ lin. indep. ナ essential cycles ガアル.
又 $f^{-1}(\mathfrak{V}'')$ ニ就テモ全様ノコトガ云ヘル。

即チ, 今 $f^{-1}(\mathfrak{V}'')$ ニ於ケル $k+1$ ケノ lin. indep. ナ essential cycles ヲ

$$\zeta_i = \sum_{l=1}^{k+j'} \alpha_i^l f^{-1} Z'_l(v''), \quad i=1,2,\cdots\cdots,k+1$$

トスル。

$\pi = Pr.\ (f^{-1}(v''),\ f^{-1}(v'))$ ノ取リ方カラ

$$\pi\zeta_i = \sum_{l=1}^{k+j'} \alpha_i^l \pi f^{-1} Z'_l(v'')$$

$$= \sum_{l=1}^{k} \alpha_i^l \pi f^{-1} Z'_l(v'') + \sum_{s=1}^{j'} \alpha_i^{k+s} \pi f^{-1} Z'_{k+s}(v'')$$

$$\sim \sum_{l=1}^{k} \alpha_i^l f^{-1} Z'_l(v') + \sum_{s=1}^{j'} \alpha_i^{k+s} \sum_{t=1}^{k} \beta_s^t f^{-1} Z'_t(v')^{(5)}$$

$$= \sum_{t=1}^{k} \alpha_i^t f^{-1} Z'_t(v') + \sum_{t=1}^{k} \left(\sum_{s=1}^{j'} \alpha_i^{k+s} \beta_s^t f^{-1} Z'_t(v') \right)$$

$$= \sum_{t=1}^{k} \left(\alpha_i^t + \sum_{s=1}^{j'} \alpha_i^{k+s} \beta_s^t \right) f^{-1} Z'_t(v')$$

$$\therefore \quad \pi\zeta_i \sim \sum_{t=1}^{k} a_i^t f^{-1} Z'_t(v'),$$

$$a_i^t = \alpha_i^t + \sum_{s=1}^{j'} \alpha_i^{k+s} \beta_s^t, \quad i=1,2,\cdots\cdots,k+1$$

即チ, 之ハ $f^{-1}(v')$ ニ於テ $k+1$ ケノ essential cycles $\pi\zeta_i$ ガ k ケノ cycles $f^{-1}Z'_1(v'),\ f^{-1}Z'_2(v'),\cdots$ $\cdots,\ f^{-1}Z'_k(v')$ ノ linear combination トシテ表

---

(5) π ノ取リ方及ビ $f^{-1}(v''),\ f^{-1}(v')$ ガ夫々 $v'',\ v'$ ト同ジ Nerv ヲ與ヘルコトカラ $\pi f^{-1} = f^{-1}\pi$

ハサレルコトヲ示シテヰル。之ハ不可。

——以上——

コノレポートヲ作ルニ際シテ小松先生ヨリ種々御指導ヲ賜ッタコトヲ厚ク御礼申シ上ゲマス。